1 – Fonctions usuelles

1.1 – Ensembles de nombres

Rappel sur la hiérarchie des nombres, chaque ensemble contenant le précédent.

- Les **entiers naturels** (ensemble $\mathbb{N}$) : ce sont les nombres utilisés pour compter, par exemple, les moutons dans un troupeau :

  $$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

  Quel est le plus grand entier ? Il n'y en a pas. En effet : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut toujours en trouver un strictement plus grand (par exemple : $n+1$). Quel est le plus petit ?

- Les **entiers relatifs** (ensemble $\mathbb{Z}$) : ce sont les entiers naturels ainsi que leurs opposés

  $$\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

  « Avoir -2 moutons » est une façon de dire qu'on doit 2 moutons : si on avait 2 moutons de plus, on pourrait les rendre et ainsi revenir à la situation où on n'a pas de mouton.

- Les **nombres décimaux** (ensemble $\mathbb{D}$) : ce sont les nombres admettant un développement décimal fini.

  Exemples : $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $-0{,}12 = -\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$, $3{,}1415 = \frac{31415}{10000} = \frac{6283}{2000}$, $\ldots$

  En pratique, dans les applications ce sont les nombres que l'on utilise puisque l'on peut approximer tout nombre réel aussi bien qu'on le souhaite par un décimal.

- Les **nombres rationnels** (ensemble $\mathbb{Q}$) : ce sont les nombres que l'on peut écrire sous forme de fraction

  $$\frac{a}{b} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

  (attention, cette écriture n'est pas unique). Les décimaux sont les rationnels qui admettent une écriture fractionnaire avec $b = 10^n$ une puissance de 10.

  De façon générale, les rationnels sont les nombres réels qui admettent un développement décimal *périodique*.

  Exemples : $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$, $1 = 1{,}\overline{0} = 0{,}\overline{9}$, $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$, $\ldots$

- Les **nombres réels** (ensemble $\mathbb{R}$) : comprenant les rationnels et des irrationnels pouvant être approximés par une suite de décimaux. Ainsi chaque nombre réel admet un développement décimal (potentiellement non périodique pour les irrationnels).

  Exemple : $\pi = 3{,}14159265\ldots$ ce qui signifie qu'on peut considérer π comme la limite des approximations successives

  $$3\,,3{,}1\,,3{,}14\,,3{,}141\,,3{,}1415\,,3{,}14159\,,\ \ldots$$

  Autres exemples célèbres : $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, $e = 2{,}71828\ldots$

- Et finalement les **nombres complexes** (ensemble $\mathbb{C}$) : ce sont les nombres obtenus en ajoutant aux réels des *nombres imaginaires* comme le nombre i satisfaisant $i^2 = -1$, par exemple :

  $$1+i,\ 2-3i,\ \frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \ldots$$

  On en reparlera au prochain chapitre.

1.2 – Fonctions exponentielles

Étant donné un nombre réel $a > 0$, on peut fabriquer une **fonction exponentielle de base** a :

$$x \mapsto a^x.$$

Nous allons donc donner un sens à l'expression « a^x » en suivant la hiérachie des ensembles de nombres ci-dessus (voir animation GeoGebra) :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, la notation a^n signifie « faire le produit de n facteurs égaux à a » :

  $$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}.$$

  Avec ceci en tête, les *lois des exposants* font sens (faire des dessins !) :

  $$(ab)^n = a^n b^n$$
  $$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$
  $$(a^m)^n = a^{mn}$$

  Comment définir a^0 ? Pour avoir $a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0$, on voit que la seule possibilité cohérente est de convenir que $a^0 := 1$.

- Puissances négatives : pour avoir
  $$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n}$$
  on voit qu'il faut donc poser
  $$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

- Puissances fractionnaires : pour avoir
  $$a = a^1 = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = (a^{\frac{1}{n}})^n,$$
  on voit que $a^{\frac{1}{n}}$ doit être la racine n-ième de a :
  $$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}.$$

- Puissances réelles quelconques : en approximant $x \in \mathbb{R}$ par des rationnels, on peut donner du sens à a^x comme étant la limite des puissances de a correspondant à ces approximations.

  Exemple :

  $$2^3 = 8$$
  $$2^{3,1} = 8{,}5741\ldots$$
  $$2^{3,14} = 8{,}81524\ldots$$
  $$2^{3,141} = 8{,}821353\ldots$$
  $$2^{3,1415} = 8{,}8244110\ldots$$
  $$2^{3,14159} = 8{,}82497382\ldots$$

  on aura ainsi

  $$2^{\pi} = 8{,}82497782707629\ldots$$

- Puissances complexes : $2^{1+i} = 2 \cdot 2^i$ ok, mais que peut bien signifier 2^i ??

On vérifie qu'à chaque étape de cette construction, les lois des exposants restent vraies. Résumé :

Proposition. (lois des exposants)

Pour $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ on a :

1) $a^0 = 1$, $a^1 = a$

2) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

3) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

4) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

5) $(a^x)^y = a^{xy}$

6) $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$ $(x \neq 0)$

Exemple (croissance exponentielle). Le nombre de bactéries dans une boîte de Petri double à toutes les 3 heures. Exprimer le nombre $f(t)$ de bactéries présentes à l'instant $t \geqslant 0$ sous forme d'une fonction exponentielle.

On va chercher une fonction de la forme

$$f(t) = N_0 \cdot a^t,$$

où N_0 est le nombre de bactéries initialement présentes. La condition :

$$f(t+3) = 2 \cdot f(t) \qquad (t \geqslant 0)$$

signifie que la base a doit satisfaire

$$a^3 = 2,$$

soit

$$a = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} = 1{,}259921\ldots$$

Donc la fonction cherchée est

$$f(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}.$$

1.3 – Fonctions logarithmes

Les **logarithmes** sont les fonctions qui permettent de répondre aux questions du type : « quel exposant doit-on mettre à a pour obtenir un résultat donné ? »

En d'autres termes :

$$a^x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_a y = x.$$

Le graphe de la fonction logarithme en base $a > 0$ est obtenu par réflexion dans la droite $y = x$ du graphe de la fonction exponentielle en base a.

En se rappelant que la notation $\log_a x$ signifie « l'exposant qu'on doit mettre à a pour obtenir x », on obtient les propriétés suivantes des logarithmes à partir des propriétés correspondantes des exposants.

Proposition (lois des logarithmes). Pour $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, on a :

1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

2) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

4) $\log_a(x^y) = y \log_a x$ $(x > 0)$

5) $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$

Cette dernière formule est aussi appelée *formule de changement de base* puisqu'elle permet d'exprimer les logarithmes dans une base quelconque (b) en fonction de la base de notre choix (a) :

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Exemple. Dans l'exemple de la colonie de bactérie, à quel moment le nombre de bactérie sera-t-il égal à un million de fois le nombre initial ?

On doit résoudre :

$$N_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 10^6 \cdot N_0.$$

Les N_0 se simplifient et on trouve

$$t = 3 \log_2(10^6) = 18 \log_2(10) = 18(1 + \log_2 5).$$

Pour évaluer cette dernière expression, on peut utiliser la touche $\log = \log_{10}$ de la calculatrice :

$$t = 18\left(1 + \frac{\log 5}{\log 2}\right) \approx 59{,}79.$$

En à peu près 60 h la colonie aura atteint un million de fois sa taille initiale.

Dernière propriété des logarithmes, qui découle facilement de celles données plus haut et qui exprime le fait que $\log_a$ est la fonction inverse de $\exp_a$:

$$x = a^{\log_a x} = \log_a(a^x).$$

1.4 – Dérivées et intégrales

On se rappelle la définition de la dérivée d'une fonction :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si on prend $f(x) = a^x$, on trouve

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{C_a} a^x :$$

la dérivée d'une fonction exponentielle est encore une fonction exponentielle de même base. En observant le comportement de la constante de proportionalité C_a (voir animation GeoGebra) on remarque que $C_a = 1$ lorsque $a = 2{,}718281828\ldots$ C'est cette valeur qui est la constante « e », base des *logarithmes naturels*

$$\ln x := \log_e x.$$

Si on revient à la dérivée de a^x : on sait maintenant que

$$(e^x)' = e^x.$$

Pour une exponentielle de base quelconque, en écrivant $a = e^{\ln a}$ on trouve en dérivant la fonction composée

$$(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x.$$

En d'autres termes, on a identifié la constante de proportionalité C_a ci-dessus :

$$C_a = \ln a.$$

En lisant la formule de dérivée de droite à gauche on obtient la primitive de a^x :

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Pour les dérivées des logarithmes : commençons par $\ln x$ qui est le plus facile. Puisque

$$x = e^{\ln x},$$

on trouve en dérivant de part et d'autre :

$$1 = e^{\ln x}\,(\ln x)' = x\,(\ln x)'$$

d'où

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Pour un logarithme en base a quelconque on utilise la formule de changement de base :

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.$$

1.5 – Sinusoïdes

On se rappelle la définition des fonctions cos et sin comme donnant les coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ d'un point sur le cercle unité sous-tendant un angle au centre de θ radians mesuré par rapport à l'axe des x (voir animation GeoGebra).

Une **sinusoïde** est une fonction de la forme

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

où A est l'**amplitude**, ω la **pulsation** et ϕ un **déphasage**.

Remarque : selon les conventions on peut noter le déphasage soit en positif ou négatif, c'est-à-dire considérer que « $A\sin\omega t$ déphasé de ϕ » peut signifier

$$\text{soit}\quad A\sin(\omega t+\phi), \quad \text{soit}\ A\sin(\omega t-\phi).$$

C'est pour cela qu'il vaut mieux dire *un* déphasage que *le* déphasage. Certains préfèrent aussi travailler avec des fonctions cosinus, les déphasages étant alors tous décalés de $\frac{\pi}{2}$.

Pourquoi a-t-on choisit d'utiliser un cosinus plutôt qu'un sinus ? Ça ne change pas grand-chose, puisque

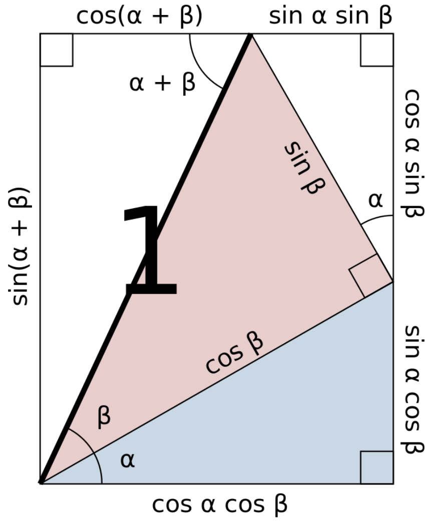
$$A\cos\omega t = A\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Proposition. La *période* d'une sinusoïde de pulsation ω est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, sa *fréquence* $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Somme de sinusoïdes de même pulsation

Rappel : formules pour le sinus et le cosinus d'une somme et d'une différence

$$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a \sin b$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a \sin b$$



Si on considère la somme de deux sinusoïdes de même pulsation ω (ici un sin et un cos pour simplifier) :

$$f(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t.$$

Si $A^2 + B^2 = 1$, on peut écrire $A = \cos\phi$, $B = \sin\phi$ donc

$$f(t) = \cos\phi\sin\omega t + \sin\phi\cos\omega t = \sin(\omega t + \phi)$$

on trouve une sinusoïde de même pulsation déphasée de ϕ.

Dans le cas général on peut procéder de façon similaire (écrire déjà $A = R\cos\phi$, $B = R\sin\phi$ ...)

Théorème. Une somme de sinusoïdes de pulsation ω est encore une sinusoïde de pulsation ω.

Battement

Que se passe-t-il quand on fait une somme de sinusoïdes de pulsations différentes ? On observe un phénomène de **battement**, particulièrement perceptible lorsque les pulsations sont proches.

Théorème. Une somme de sinusoïdes de pulsations $\omega_1 \neq \omega_2$ présente des oscillations de pulsation $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ modulées par une sinusoïde de pulsation $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$.

Voir la fiche de TD pour le cas des amplitudes égales (se généralise au cas d'amplitudes quelconques). Discuter de la pulsation « perçue » $\omega_1 - \omega_2$ (voir animation GeoGebra).